PRIMER NIVEL

XL OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Melina tiene 5 monedas blancas, todas auténticas y 5 monedas azules, 3 de ellas auténticas y 2 falsas. Ella sabe que las 8 monedas auténticas pesan lo mismo y que una de las falsas pesa un gramo más que una auténtica y la otra falsa pesa un gramo menos que una auténtica.
Decidir si ella puede determinar con certeza, usando hasta tres veces una balanza de dos platos, cuáles son las monedas falsas, indicando cual pesa más y cuál pesa menos.

Problema 2.
En las casillas de un tablero de 8×8 Facu escribió en algún orden los números de 1 a 64, uno en cada casilla, sin repeticiones. Decimos que un número es *bueno* si es el mayor número de su fila y también es el menor número de su columna.
a) Decidir si se puede afirmar que en el tablero de Facu hay por lo menos un número bueno.
b) Decidir si se puede afirmar que en el tablero de Facu hay como mucho un número bueno.

Problema 3.
Sea *ABCD* un trapecio de lados *AB*, *BC*, *CD* y *DA* con *BC* paralelo a *AD*, tal que $C\hat{A}D = 30^{\circ}$. Se sabe que la diagonal *BD* satisface $BD = \dfrac{BC + AD}{2}$.
Si las diagonales *AC* y *BD* se cortan en *M*, calcular el ángulo $A\hat{M}B$.

PRIMER NIVEL

XL OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
a) Determinar un conjunto A de 10 enteros positivos distintos tal que ningún grupo de 6 de ellos tenga suma divisible por 6.
b) ¿Es posible que un conjunto B de 11 enteros positivos sea tal que ningún grupo de 6 de ellos tenga suma divisible por 6?

Problema 5.
Diremos que un conjunto de enteros positivos distintos, que tiene por lo menos dos enteros positivos, es *centenario* si el mayor de los números es 100. El *promedio* de un conjunto centenario es el promedio de sus números. Por ejemplo, el promedio del conjunto $\{1,2,20,100\}$ es $\frac{123}{4}$ y el promedio del conjunto $\{74,90,100\}$ es 88.
Determinar todos los números enteros que se pueden obtener como el promedio de un conjunto centenario.

Problema 6.
Ocho jueces califican a los participantes de un concurso con 1 o 0. Se sabe que para cada dos participantes: hay dos jueces que calificaron a ambos con 1; hay dos jueces que calificaron al primero con 1 y al segundo con 0; hay dos jueces que calificaron al primero con 0 y al segundo con 1; y finalmente hay dos jueces que calificaron a ambos con 0. Determinar el máximo número posible de participantes en el concurso.

SEGUNDO NIVEL

XL OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Decimos que un entero positivo es un número *bueno* si el dígito 2 aparece más veces que el 3, y que es un número *malo* si el dígito 3 aparece más veces que el 2. Por ejemplo, 2023 es bueno y 123 no es ni bueno ni malo. Calcular la resta de la cantidad de números buenos menos la cantidad de números malos para los enteros menores o iguales que 2023.

Problema 2.
Dado el número 720, Juan debe elegir 4 números que sean divisores de 720. Él gana si para cada uno de sus cuatro números vale que ese número no es divisor de la multiplicación de los otros tres. Decidir si Juan puede ganar.

Problema 3.
En el paralelogramo $ABCD$, la longitud del lado AB es igual a la mitad de la del lado BC. La bisectriz del ángulo $A\hat{B}C$ corta al lado AD en K y a la diagonal AC en L. La bisectriz del ángulo $A\hat{D}C$ corta a la prolongación del lado AB en M, con B entre A y M. La recta ML corta al lado AD en F. Calcular el cociente $\frac{AF}{AD}$.

SEGUNDO NIVEL

XL OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Al inicio Igna distribuye 1000 bolillas en 30 cajas. Luego Igna y Mica juegan alternadamente, comenzando por Igna. Cada jugador, en su turno, elige una caja y retira una bolilla. Cuando un jugador retira la última bolilla de una caja, gana una moneda. Hallar el máximo entero k, tal que independientemente de cómo juegue Mica, Igna pueda ganar por lo menos k monedas.

Problema 5.
Un paralelepípedo recto pintado de azul se corta en cubitos de 1x1. Hallar las posibles dimensiones, si la cantidad de cubitos sin caras azules es igual a un tercio de la cantidad total de cubitos.
ACLARACIÓN: Un paralelepípedo recto es un cuerpo de 6 caras, todas ellas rectángulos (o cuadrados).

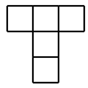
Problema 6.
Se tiene una fila de n sillas, numeradas ordenadamente de izquierda a derecha de 1 a n. Además, en los respaldos de las sillas se distribuyen los n números de 1 a n, uno en cada silla, de modo que en ningún caso coincida el número de la silla con el número de su respaldo. Hay un niño sentado en cada silla. Cada vez que la profesora aplaude, cada niño se fija cuál es el número del respaldo de la silla en la que está sentado y se sienta en la silla numerada con ese número. Demostrar que, para todo m que no sea una potencia de un primo, con $1 < m \leq n$, es posible distribuir los números de los respaldos de manera tal que después de que la profesora haya aplaudido m veces, por primera vez estén todos los niños sentados en las sillas donde se encontraban sentados al inicio del juego.
(Durante el proceso, puede ocurrir que los niños regresen a sus sillas originales, pero no lo hacen todos al mismo tiempo hasta la señal número m.)

TERCER NIVEL

XL OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Sea $n \geq 3$ un entero. Consideramos un tablero cuadrado de $n \times n$ casillas. En cada paso cambiamos el color de las cinco casillas que conforman una figura como la que se muestra (las casillas blancas pasan a negras y las negras pasan a blancas). La figura se puede rotar 90º o 180º o 270º.



Inicialmente todas las casillas son blancas. Determinar para qué valores de n se puede lograr, mediante una sucesión de pasos, que todas las casillas del tablero sean negras.

Problema 2.
Hallar todos los enteros positivos n tales que todos los factores primos de $2^n - 1$ son menores o iguales que 7.

Problema 3.
Sea ABC un triángulo y M el punto medio del lado BC. Sea Ω la circunferencia que pasa por A, B y C. La recta AM corta a Ω en el punto P. Sea AF la altura del triángulo, con F en BC, y sea H el punto de intersección de las tres alturas del triángulo. Las semirrectas MH y PF cortan a Ω en K y T respectivamente. Demostrar que la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo KTF es tangente a BC.

TERCER NIVEL

XL OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Diremos que un número primo (positivo) es *bueno* si es igual a la resta de dos cubos enteros positivos. Por ejemplo: 7 es un primo bueno pues $2^3 - 1^3 = 7$.
Determinar cuánto puede valer el último dígito de un primo bueno. Dar todas las posibilidades.

Problema 5.
Sea n un entero positivo. Beto escribe en el pizarrón una lista de n enteros no negativos. Luego él realiza una sucesión de movidas (de dos pasos) del siguiente tipo:
Primero, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, él cuenta cuántos números del pizarrón son menores o iguales que i. Sea a_i el número obtenido para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.
A continuación, borra todos los números del pizarrón y escribe los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
Por ejemplo, si $n = 5$ y los números iniciales del pizarrón son 0, 7, 2, 6, 2, al cabo de la primera movida los números del pizarrón serán 1, 3, 3, 3, 3; después de la segunda movida serán 1, 1, 5, 5, 5, y así siguiendo.
a) Demostrar que, para todo n y para toda configuración inicial, llegará un momento a partir del cual los números ya no se modificaran más al utilizar esta movida.
b) Hallar (en función de n) el mínimo valor de k tal que, para toda configuración inicial, las movidas realizadas a partir de la movida número k no cambiarán los números del pizarrón.

Problema 6.
En un torneo de ping pong participan $n \geq 3$ jugadores que llamaremos $1, 2, \ldots, n$. Las reglas del torneo son las siguientes: al comienzo, los jugadores están en una fila, ordenados de 1 a n. Los jugadores 1 y 2 juegan el primer partido. El ganador queda al comienzo de la fila y el perdedor se coloca detrás del último de la fila. En la siguiente jugada, se enfrentan los dos que en ese momento son los primeros dos de la fila, el ganador queda primero en la fila y el perdedor va al final de la fila, justo detrás del último perdedor. Y así siguiendo. Al cabo de N partidos, el torneo finaliza. El jugador 1 ha ganado a_1 partidos, el jugador 2 ha ganado a_2 partidos, y así siguiendo hasta el jugador n, que ha ganado a_n partidos (es obvio que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = N$). Determinar cuántos partidos ha perdido cada jugador, en función de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.